УДК 004.021:519.651

Л.П. Вакал
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Україна
пр. Академіка Глушкова, 40, м. Київ, 03187

ПОБУДОВА НАЙКРАЩИХ ЧЕБИШОВСЬКИХ НАБЛИЖЕНЬ СПЛАЙНАМИ

L.P. Vakal
V.M. Hlushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Ukraine
40, Academician Hlushkov av., Kyiv, 03187

CONSTRUCTING BEST CHEBYSHEV SPLINE APPROXIMATIONS

З метою побудови найкращого чебишовського наближення для заданої функції поліноміальним сплайном степеня n з r фіксованими вузлами у статті пропонується застосувати після відповідної модифікації алгоритм апроксимації функції багатьох змінних узагальненим многочленом. У цьому алгоритмі використовується зведення до задачі лінійного програмування з головною двоїстою максимум-задачею. Аналіз чисельних результатів показав, що у більшості випадків модифікований алгоритм знаходить більш точні наближення сплайнами, ніж інші відомі алгоритми.

Ключові слова: поліноміальний сплайн, найкраща чебишовська апроксимація, алгоритм, лінійне програмування.

In order to compute the best Chebyshev (uniform) approximation for a given function by polynomial spline of degree n with r fixed knots it is proposed to apply, after an appropriate modification, an algorithm for approximating many-variables function by a generalized polynomial. In the algorithm a reduction to the linear programming problem with the main dual maximum-problem is used. Analysis of the numerical results showed that in most cases the modified algorithm has computed spline approximations more precisely than other known algorithms.

Keywords: polynomial spline, best Chebyshev approximation, algorithm, linear programming.

Вступ

Для апроксимації функціональних залежностей складної структури, які виникають при розв’язанні різноманітних науково-технічних задач, широко використовують сплайни. Найважливішу роль серед них грають поліноміальні сплайни, склеєні з кусків многочленів. Вони застосовуються, наприклад, для аналітичного опису поверхонь деталей машин (крила та фюзеляжу літака, корпусу водного судна, профілю сопла реактивного двигуна), для завдання траєкторії руху різця станка з програмним керуванням, при розрахунках на міцність будівельних конструкцій та ін. [1—3].

У статті розглядається задача побудови поліноміального сплайна найкращого чебишовського наближення з фіксованими вузлами. Цей сплайн при такому ж числі параметрів наближає функцію не гірше, ніж інтерполяційний сплайн. Крім того, для побудови інтерполяційного сплайна звичайно потрібно задавати ще деякі граничні умови. Тому в багатьох випадках сплайн найкращого чебишовського наближення виявляється кращим [4].

Постановка задачі, аналіз останніх досліджень і публікацій

Нехай на скінченому відрізку $[\alpha, \beta]$ дійсної осі задано сітку

$$\Delta_r : \quad \alpha = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_r < \nu_{r+1} = \beta, \tag{1}$$

де r — натуральне число.

Функцію $s(x)$ називають поліноміальним сплайном степеня n дефекту k

$(1 \le k \le n)$ з вузлами $\nu_1, \ldots, \nu_r$, якщо на кожному відрізку $[\nu_{j-1}, \nu_j]$ $(j = 1, \ldots, r+1)$ функція s збігається з деяким многочленом степеня n і $s \in C^{n-k}[\alpha, \beta]$.

Прикладом сплайна степеня n дефекту 1 з єдиним вузлом ξ може бути функція

$$(x-\xi)_+^n = \begin{cases} (x-\xi)^n, x > \xi, \\ 0, \qquad x \le \xi. \end{cases} \tag{2}$$

Множину сплайнів $\{s(x)\}$ для фіксованої сітки Δ_r позначимо Z_{n,k,Δ_r}. Це – лінійний простір розмірності $n + rk + 1$. Будь-який сплайн $s \in Z_{n,k,\Delta_r}$ можна представити у вигляді суми многочлена і лінійної комбінації елементарних сплайн-функцій (2), причому таке представлення єдине [5]. Зокрема, сплайн степеня n дефекту 1 записується у вигляді

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-\alpha)^i + \sum_{i=1}^{r} a_{n+i} (x-\nu_i)_+^n , \tag{3}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}$ – дійсні числа.

Задача найкращого чебишовського наближення заданої на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ поліноміальним сплайном з r фіксованими вузлами (1) полягає у знаходженні сплайна $s^* \in Z_{n,k,\Delta_r}$, який задовольняє умові

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} \left| f(x) - s^*(x) \right| = \min_{s(x)\in Z_{n,k,\Delta_r}} \max_{x\in[\alpha,\beta]} \left| f(x) - s(x) \right| . \tag{4}$$

Труднощі розв’язання задачі (4) пов’язані, насамперед, з тим, що простір сплайнів Z_{n,k,Δ_r} не є чебишовським. Тут не працюють напряму наближені методи побудови сплайна s^*, які ґрунтуються на теоремі Чебишова [6]. Крім того, у загальному випадку може існувати більше одного сплайна найкращого наближення.

Для знаходження сплайна s^* у роботах [4,7, 8] пропонується замінити відрізок $[\alpha, \beta]$ деякою сіткою

$\Delta_m: \quad \alpha = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = \beta, \; m > n + r,$

і звести задачу найкращої чебишовської сплайн-апроксимації на цій сітці

$$\max_{1\le l\le m} \left| f(x_l) - s^*(x_l) \right| = \min_{s(x)\in Z_{n,k,\Delta_r}} \max_{1\le l\le m} \left| f(x_l) - s(x_l) \right| \tag{5}$$

до задачі лінійного програмування (ЛП)

$$\begin{cases} \min \lambda, \\ f(x_l) - \sum_{i=0}^{n} a_i (x_l - \alpha)^i - \sum_{i=1}^{r} a_{n+i} (x_l - \nu_i)_+^n - \lambda \le 0, l = 1, \ldots, m, \\ -f(x_l) + \sum_{i=0}^{n} a_i (x_l - \alpha)^i + \sum_{i=1}^{r} a_{n+i} (x_l - \nu_i)_+^n - \lambda \le 0, \, l = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{6}$$

методи розв’язання якої добре розроблені. Вектор коефіцієнтів сплайна $s^*(x)$ можна також шукати як чебишовську точку несумісної системи лінійних рівнянь [4]. Третій підхід до знаходження сплайна $s^*(x)$ полягає в узагальненні алгоритму послідовних

чебишовських інтерполяцій Ремеза [9–11] на випадок апроксимації поліноміальними сплайнами [12, 13].

У статті пропонується розв'язувати задачу сплайн-наближення (4) зведенням до алгоритму А.О. Каленчук-Порханової та Л.П. Вакал [14] побудови узагальненого многочлена $\Phi^*(x)=\sum_{i=0}^{q}a_i\varphi_i(X)$ найкращого чебишовського наближення для функції $f(X)$, $X=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega$, де Ω – множина точок p-вимірного евклідового простору, $\{\varphi_i(X)\}_{i=0}^{q}$ – система лінійно незалежних на Ω функцій, які називаються базисними. Узагальнений многочлен $\Phi^*(x)$ є розв'язком наступної задачі

$$\max_{X\in\Omega}\left|f(\mathrm{X})-\Phi^*(X_l)\right|=\min_{a_i}\max_{X\in\Omega}\left|f(X_l)-\sum_{i=0}^{q}a_i\varphi(X)\right|. \tag{7}$$

В алгоритмі [14] використовується зведення задачі (7) до задачі ЛП, при цьому, завдяки урахуванню специфіки задачі чебишовської апроксимації, вказаний алгоритм є більш ефективним для її розв'язання, ніж загальні методи ЛП (див. докладніше в наступному розділі). У випадку апроксимації поліноміальним сплайном виду (3) як базисного в алгоритмі вибирають функції

$$\varphi_i(x)=(x-\alpha)^{i-1},\ i=1,\ldots,n+1;\ \varphi_i(x)=(x-\nu_{i-n-1})_+^n,\ i=n+2,\ldots,n+r+1\,.$$

У низці прикладних задач зручно використовувати представлення сплайна $s(x)$ через так звані *B*-сплайни, спеціальним чином побудовані функції $N_{i,n}(x)$ з Z_{n,k,Δ_r}, які визначають за рекурентними формулами [2]:

$$N_{i,0}(x)=\begin{cases}1,\ x\in[\nu_i,\nu_{i+1}]\\0,\ x\notin[\nu_i,\nu_{i+1}]\end{cases},\ N_{i,n}(x)=\frac{x-\nu_i}{\nu_{i+n}-\nu_i}N_{i,n-1}(x)+\frac{\nu_{i+n+1}-x}{\nu_{i+n+1}-\nu_{i+1}}N_{i+1,n-1}(x)\,. \tag{8}$$

Функції $N_{i,n}(x)$ ($i=-n,-n+1,\ldots,r$) є лінійно незалежними. Якщо ввести додаткові вузли $\nu_{-n}<\nu_{-n+1}<\ldots<\nu_{-1}<\alpha$, $\beta<\nu_{r+2}<\nu_{r+3}<\ldots<\nu_{r+n+2}$, то будь-який сплайн $s\in Z_{n,k,\Delta_r}$ можна однозначно представити у вигляді [6]

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n+r+1}c_iN_{i-n-1,n}(x)\,. \tag{9}$$

Алгоритм [14] апроксимації узагальненим многочленом після відповідної модифікації може бути застосований і для знаходження найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ на множині точок сітки Δ_m за допомогою сплайна (9). У цьому випадку в ролі базисних виступають функції (8).

Модифікація алгоритму для апроксимації сплайнами

В алгоритмі [14] реалізовано підхід, в якому розв'язання задачі найкращого чебишовського наближення (7) для функції $f(X)$, $X=(x_1,\ldots,x_p)$, на деякій p–вимірній сітці узагальненим многочленом $\Phi^*(x)=\sum_{i=0}^{q}a_i\varphi_i(X)$ за системою базисних функцій $\{\varphi_i(X)\}_{i=0}^{q}$, зводиться до задачі ЛП з головною двоїстою максимум-задачею, число обмежень якої при $m>>q$ ($m-$ число точок сітки) значно менше кількості обмежень прямої задачі. У випадку застосування алгоритму для апроксимації сплайнами виду (3) або (9) число обмежень двоїстої задачі дорівнює $n+r+2$, а

прямої – $2m-(n+r+2)$.

Алгоритм [14] дозволяє отримати найкращі наближення з меншою похибкою та, як правило, за значно меншу кількість кроків, порівняно з аналогічними алгоритмами (наприклад, алгоритм [15]). Це досягається за рахунок низки удосконалень обчислювальної схеми алгоритму, основним з яких є такі:

- зведення до максимум-задачі ЛП проводиться з орієнтацією на отримання початкової симплекс-таблиці з якомога більшим значенням цільової функції, завдяки чому оптимальний розв'язок знаходиться за відносно малу кількість кроків;
- стандартна симплекс-таблиця замінюється майже удвічі меншою, але рівноцінною за поданою інформацією таблицею, в якій вже є допустимий базисний розв'язок двоїстої максимум-задачі;
- при розв'язанні максимум-задачі ЛП модифікованим симплекс-методом реалізується напівоптимальний варіант переходу від одного допустимого базисного розв'язку до наступного.

При модифікації алгоритму [14] для апроксимації поліноміальними сплайнами потрібно змінити набір вхідних даних. У цьому випадку для роботи алгоритму слід ввести такі дані:

- кількість коефіцієнтів сплайна q **(**$q=n+r+1$**)**;
- вузли сплайна ν_j, $j=0,\dots,r+1$ ($\nu_0=\alpha$, $\nu_{r+1}=\beta$);
- число точок сітки *m*;
- точки x_l сітки**,** $l=1,\dots,m$;
- значення функції у точках сітки $f(x_l)$.

Вважається, що $m>n+r+1$ і на кожному з проміжків $[\nu_{j-1},\nu_j]$, $j=1,\dots,r+1$, є щонайменше дві точки сітки Δ_m.

Для побудови сплайна потрібно також внести зміни в процедуру формування матриці, на базі якої створюється опорна симплекс-таблиця. Ця матриця позначається *T* і має розмір $(n+r+3)\times m$. У випадку апроксимації сплайном виду (3) елементи t_{ij} цієї матриці обчислюються за формулами:

$$t_{ij}=(x_j-\alpha)^{i-1},\ i=1,\dots,n+1,\ t_{ij}=(x_j-\nu_{i-1-n})_+^n,\ i=n+2,\dots,n+r+1,$$
$$t_{n+r+2,j}=-f(x_j),\ t_{n+r+3,j}=0,\ j=1,\dots,m.$$

Якщо ж для наближення використовується представлення сплайна у формі (9), то елементи матриці *T* визначаються за формулами

$$t_{ij}=N_{i-n-1,n}(x_j),\ t_{n+r+2,j}=-f(x_j),\ t_{n+r+3,j}=0, i=1,\dots,n+r+1,\ j=1,\dots,m.$$

Для обчислення значення B-сплайна $N_{i,n}(x)$ степеня *n* в точці x з проміжку $[\nu_i,\nu_{i+1}]$ розроблена спеціальна процедура *Bspline*, розрахунки в якій проводяться з використанням рекурентних формул (8). При цьому додаткові вузли, необхідні для обчислення *B*-сплайнів, покладаються рівними α та β, тобто $\nu_{-n}=\dots=\nu_{-1}=\alpha$, $\nu_{r+2}=\dots=\nu_{r+n+2}=\beta$. Число операцій множення і ділення, що виконуються в процедурі *Bspline* для кожного значення x, пропорційне n^2.

Результатами роботи модифікованого алгоритму є значення похибки ρ найкращого чебишовського наближення заданої функції f сплайном s^*

$$\rho = \max_{1 \le l \le m} \left| f(x_l) - s^*(x_l) \right|$$

та значення коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}$ сплайна s^*, якщо використовується сплайн у формі (3), або коефіцієнтів $c_1, \ldots, c_{n+r+1}$, якщо сплайн представляється у формі (9).

Результати обчислювальних експериментів

Для перевірки ефективності застосування модифікованого алгоритму для апроксимації сплайнами з фіксованими вузлами виконано серію обчислювальних експериментів. Для низки тестових функцій, результати сплайн-апроксимації яких відомі з наукової літератури, похибки наближення, обчислені за цим алгоритмом, порівнювались з похибками, знайденими за іншими алгоритмами найкращого чебишовського наближення сплайнами.

У табл. 1 і 2 представлені результати для двох тестових прикладів, а саме: у табл. 1 наведено похибки апроксимації функції $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[0,1]$ сплайнами степенів від другого до п'ятого, а в табл. 2 – похибки наближень функції $f(x) = (1+x)^{-1}$ на відрізку $[0,1]$ сплайнами третього і четвертого степенів, отримані за модифікованим алгоритмом (у таблиці позначається як алгоритм 1) і за алгоритмом [13] (позначається як алгоритм 2). Зазначимо, що для обчислень у першому прикладі використовувалась рівномірна сітка з m = 2001 точок, у другому – з m = 1001 точок.

Таблиця 1. Апроксимація функції $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0,1]$ сплайном степеня n

Число вузлів r	Вузли	Похибка апроксимації			
		$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	0,04	0,04077	0,01228	0,01041	0,00917
2	0,0065; 0,108	0,01190	0,00495	0,00402	0,00332
3	0,002; 0,02; 0,15	0,00840	0,00312	0,00181	0,00137

Таблиця 2. Апроксимація функції $f(x) = (1+x)^{-1}$ на $[0,1]$ сплайном степеня n

Число вузлів r	Вузли	$n=3$		$n=4$	
		Похибка за алгоритмом 1	Похибка за алгоритмом 2	Похибка за алгоритмом 1	Похибка за алгоритмом 2
1	0,5	0,000325	0,000385	0,000051	0,000051
2	0,33; 0,67	0,000086	0,000089	0,0000099	0,000010
3	0,25; 0,5; 0,75	0,000033	0,000033	0,0000036	0,0000036
4	0,2; 0,4; 0,6; 0,8	0,000015	0,000015	0,0000017	0,0000017

Висновки

Для побудови поліноміального сплайну найкращого чебишовського наближення, у статті запропоновано застосовувати, після відповідної модифікації, алгоритм апроксимації функції багатьох змінних узагальненим поліномом [14]. В алгоритмі використовується зведення задачі чебишовського наближення до задачі лінійного програмування з головною двоїстою максимум-задачею, число обмежень якої значно менше кількості обмежень прямої задачі. Завдяки удосконаленню обчислювальної схеми цей алгоритм має переваги за точністю та швидкодією у порівнянні з іншими аналогічними алгоритмами.

При модифікації алгоритму для наближення сплайнами розширено набір

вхідних даних, змінено процедуру формування матриці, на базі якої створюється опорна симплекс-таблиця, додано процедуру обчислення значень *B*-сплайнів у точках (для випадку подання поліноміального сплайна у вигляді лінійної комбінації *B*-сплайнів) та ін. Аналіз результатів обчислювальних експериментів показав, що в більшості випадків за допомогою модифікованого алгоритму вдається побудувати сплайн-наближення з кращою точністю, ніж за іншими відомими алгоритмами.

Література

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами / Б.А. Попов. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В.И. Бердышев, Л.В. Петрак. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 297 с.
3. Малачівський П. Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості / П. Малачівський, Я. Пізюр, В. Андруник // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2007. – № 67. – С. 24–30.
4. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
5. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
6. Бердышев В.И. Численные методы приближения функций / В.И. Бердышев, Ю.Н. Субботин. – Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. – 120 с.
7. Barrodale J. A note on numerical procedures for approximation by spline functions / J. Barrodale, A. Young // Comput. J. – 1966. – Vol. 9. – P. 318 – 320.
8. Esch R.E. Computational methods for the best spline function approximation / R.E. Esch, W.L. Eastman // J. Approx. Theory. – 1969. – Vol. 2. – P. 85 – 96.
9. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
10. Вакал Л.П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал, А.О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. – 2006. – № 2. – С. 15 – 24.
11. Каленчук-Порханова А.А. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой / А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Искусственный интеллект. – 2009. – № 1. – С. 158 – 165.
12. Schumaker L.L. Some algorithms for the computation of interpolating and approximating spline functions / Schumaker L.L. // T.N.E. Greville (Ed.) Theory and applications of spline functions. – New York: Academic Press, 1969. – P. 87 – 102.
13. Nürnberger G. A Remez type algorithm for spline functions / G. Nürnberger, M. Sommer // Numer. Math. – 1983. – Vol. 41, N 1. – P. 117 – 146.
14. Каленчук-Порханова А.О. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних / А.О. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141 – 148.
15. Кондратьев В.П. Алгоритм наилучшего приближения функций многих переменных / В.П. Кондратьев // Программы оптимизации (приближение функций). – Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. – 1972. – Вып. 3. – С. 20 – 48.

Literatura

1. Popov B.A. Ravnomernoe priblizhenie splaynami / B.A. Popov. – Kiev: Nauk. dumka, 1989. – 272 s.
2. Berdyshev V.I. Approksimatsiya funktsiy, szhatie chislennoy informatsii, prilozheniya / V.I. Berdyshev, L.V. Petrak. – Ekaterinburg: UrO RAN, 1999. – 297 c.
3. Malachivs'kyy P. Neperervne y hladke rivnomirne splayn-nablyzhennya temperaturnoyi kharakterystyky sensora ta yoho chutlyvosti / P. Malachivs'kyy, Ya. Pizyur, V. Andrunyk // Vymiryuval'na tekhnika ta metrolohiya. – 2007. – № 67. – S. 24–30.
4. Stechkin S.B. Splayny v vychislitelnoy matematike / S.B. Stechkin, Yu.N. Subbotin. – M.: Nauka, 1976. – 248 s.
5. Kornejchuk N.P. Tochnyie konstanty v teorii priblizheniya / N.P. Kornejchuk. – M.: Nauka, 1987. – 424 s.
6. Berdyshev V.I. Chislennye metody priblizheniya funktsiy / V.I. Berdyshev, Yu.N. Subbotin. – Sverdlovsk: Sredne-Uralskoe kn. izd-vo, 1979. – 120 s.
7. Barrodale J. A note on numerical procedures for approximation by spline functions / J. Barrodale, A. Young // Comput. J. – 1966. – Vol. 9. – P. 318 – 320.

8. Esch R.E. Computational methods for the best spline function approximation / R.E. Esch, W.L. Eastman // J. Approx. Theory. – 1969. – Vol. 2. – P. 85 – 96.
9. Remez E.Ya. Osnovy chislennyh metodov chebyshevskogo priblizheniya / E.Ya. Remez. – Kiev: Nauk. dumka, 1969. – 623 s.
10. Vakal L.P. Analitychna obrobka danykh na osnovi chebyshovs'koyi aproksymatsiyi / L.P. Vakal, A.O. Kalenchuk-Porkhanova // Matematychni mashyny i systemy. – 2006. – № 2. – С. 15 – 24.
11. Kalenchuk-Porhanova A.A. Apparat approksimatsii v sostave programmnogo obespecheniya superkomp'yutera s klasternoy arhitekturoy / A.A. Kalenchuk-Porhanova, L.P. Vakal // Shtuchnyy intelekt. – 2009. – № 1. – S. 158 – 165.
12. Schumaker L.L. Some algorithms for the computation of interpolating and approximating spline functions / Schumaker L.L. // T.N.E. Greville (Ed.) Theory and applications of spline functions. – New York: Academic Press, 1969. – P. 87 – 102.
13. Nürnberger G. A Remez type algorithm for spline functions / G. Nürnberger, M. Sommer // Numer. Math. – 1983. – Vol. 41, N 1. – P. 117 – 146.
14. Kalenchuk-Porkhanova A.O. Pobudova naykrashchykh rivnomirnykh nablyzhen' funktsiy bahat'okh zminnykh / A.O. Kalenchuk-Porkhanova, L.P. Vakal // Komp"yuterni zasoby, merezhi ta systemy. – 2007. – № 6. – S. 141 – 148.
15. Kondrat'ev V.P. Algoritm nailuchshego priblizheniya funktsiy mnogih peremennyh / V.P. Kondrat'ev // Programmyi optimizatsii (priblizhenie funktsiy). – Sverdlovsk: IMM UNTs AN SSSR. – 1972. – Vyp. 3. – S. 20 – 48.

RESUME

L.P. Vakal

Constructing best chebyshev spline approximations

For a given function $f \in C[\alpha,\beta]$ we are interested in computing the best approximation from the subspase of spline functions of degree n and defect $k=1$ with r fixed knots $\alpha < \nu_1 < \ldots < \nu_r < \beta$, with respect to the Chebyshev (supremum) norm.

In order to construct the best spline approximation, it is proposed to apply, after an appropriate modification, an algorithm for approximating many-variables function by a generalized polynomial [14]. In the algorithm a reduction to the linear programming problem with the main dual maximum-problem is used. The algorithm is more effective than general methods of linear programming since it takes into account the particularity of the best Chebyshev approximation problem.

This algorithm for approximating many-variables function was modified for spline-approximation. In particular, the input set was expanded, the procedure of matrix formation (on the basis of this matrix a simplex table is created) was changed, a procedure for computing B-splines values was added (when a spline is presented by a linear combination of B-splines), etc.

The modified algorithm has been tested on a number of functions. In the article we give two of these numerical results. The first involves approximating $\sqrt{x}$ on [0,1] by splines of degrees $n=\overline{2,5}$ and the second – $(1+x)^{-1}$ on [0,1] by splines of degrees $n=3,4$. Analysis of the numerical results showed that in most cases the modified algorithm computes spline approximations more precisely than other known algorithms.

Надійшла до редакції 15.09.2017